

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С НЕКРАТНЫМИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

<https://doi.org/10.5281/zenodo.14548490>

А.Абдукодиров, О.Тухтамуродова.

Аннотация

В данной статье приведено общее решение дифференциальных уравнений третьего порядка с двумя независимыми переменными с некратными действительными характеристиками, и решение **ЗАДАЧИ КОШИ** найдено в явном виде и доказано существование, единственность и устойчивость решение.

Ушбу маколада каррала бўлмаган хақиқий характеристикаларга эга бўлган икки ўзгарувчи учинчи тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламанинг умумий ечими келтирилган ва Коши масаласининг ечими аниқ кўринишда топилган ҳамда ечимнинг мавжудлиги, ягоналиги ва турғунлиги исботланган.

In this article, a general solution of third-order differential equations with two independent variables with non-multiple real characteristics is given, and an explicit solution of the CAUCHY PROBLEM is found and the existence, uniqueness and stability of the solution are proven.

В некоторой области Ω плоскости xOy рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных третьего порядка с двумя независимыми переменными, линейное относительно старших производных:

$$L[u] = \sum_{k=0}^3 A_k \frac{\partial^3 u}{\partial x^{3-k} \partial y^k} = 0, \quad (1)$$

где $A_k = \text{const}$, $A_k \neq 0$, $k = \overline{0,3}$.

Пусть характеристическое уравнение

$$A_0 t^3 - A_1 t^2 + A_2 t - A_3 = 0, \quad (t = dy/dx) \quad (2)$$

имеет три различных действительных отличных от нуля корней: $t_1 = \lambda_1$, $t_2 = \lambda_2, t_3 = \lambda_3$. Тогда семейство линий $y - \lambda_n x = C_n$, $n = \overline{1,3}$ является

характеристиками уравнения (1). Учитывая это, общее решения уравнения (1) из класса $C^3(\Omega)$ можно представить в виде:

$$U(x, y) = f_1(y - \lambda_1 x) + f_2(y - \lambda_2 x) + f_3(y - \lambda_3 x),$$

где $f_n(y - \lambda_n x) \in C^3(\Omega)$, $n = \overline{1, 3}$ -произвольные функции.

В работе [1] доказано, что если характеристическое уравнение имеет три различных действительных отличных от нуля корней, тогда в области Ω уравнение (1) может быть приведено к следующему каноническом виду:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + c \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0, \quad c \neq 1. \quad (3)$$

Так как уравнение (3) можно представить в виде

$$U_{xxx} + cU_{xxy} - U_{xyy} - cU_{yyy} = 0, \quad (3)$$

то характеристическое уравнение этого уравнения имеет вид

$$(dy)^3 - c(dy)^2 dx - dy(dx)^2 + c(dx)^3 = 0.$$

Разделяя обе стороне последнего уравнение на dx и вводя обозначение $t = dy/dx$ имеем следующее алгебраического уравнение третьего степени

$$t^3 - ct^2 - t + c = 0, \quad (t^2 - 1)(t - c) = 0 \quad (4)$$

корни которого равны $t_1 = c$, $t_2 = 1$, $t_3 = -1$.

Согласно с [4], дискриминантом уравнения (4) назовём выражение

$$D = \prod_{3 \geq i > j \geq 1} (t_i - t_j)^2 = (t_3 - t_2)^2 (t_3 - t_1)^2 (t_2 - t_1)^2 = (-1 - 1)^2 (-1 - c)^2 (1 - c)^2 = 4(1 - c^2)^2.$$

Так как уравнение (4) имеет три различных действительных отличных от нуля корней, то $D > 0$ и $4(1 - c^2)^2 \neq 0$. Тогда общее решение уравнения (3) имеет вид:

$$U(x, y) = f_1(y - cx) + f_2(y - x) + f_3(y + x). \quad (5)$$

Рассмотрим в области $\Omega = \{(x, y) \in R^2 : x > 0, y > 0\}$ уравнению (3). Для точности, считаем что $c > 1$.

Рассмотрим задачу Коши. Найти регулярное решение $U(x, y) \in C^3(\Omega)$ уравнения (3) в плоскости независимых переменных (x, y) , удовлетворяющих условиям на не характеристической линии $y = 0$:

$$U(x, y)_{y=0} = \varphi_1(x), \quad \frac{\partial^{n-1} U(x, y)}{\partial y^{n-1}} \Big|_{y=0} = \varphi_n(x), \quad n = \overline{2, 3}, \quad (6)$$

где $\varphi_n(x) \in C^3(0, l)$, $n = \overline{1, 3}$ -заданные функции, причем $\varphi_n(0) = 0$, $n = \overline{1, 3}$.

Заметим что, в работе [3] приведено общее решение дифференциальных уравнений пятого порядка с двумя независимыми переменными с некротными действительными характеристиками, и решение задачи Коши найдено в явном виде.

Решение задачи Коши ищем в виде (5) и определим функции f_n , $n = \overline{1,3}$ таким образом, чтобы удовлетворялись начальные условия (6). Для этого, подставляя (5) в начальные условия, (6) имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} f_1(-cx) + f_2(-x) + f_3(x) = \varphi_1(x) \\ f_1^{(I)}(-cx) + f_2^{(I)}(-x) + f_3^{(I)}(x) = \varphi_2(x) \\ f_1^{(II)}(-cx) + f_2^{(II)}(-x) + f_3^{(II)}(x) = \varphi_3(x). \end{cases}$$

Интегрируя эти уравнения, имеем:

$$\begin{cases} f_1(-cx) + f_2(-x) + f_3(x) = \varphi_1(x) \\ -\frac{1}{c} f_1(-cx) - f_2(-x) + f_3(x) = F_2(x) \\ \frac{1}{c^2} f_1(-cx) + f_2(-x) + f_3(x) = F_3(x) \end{cases}$$

$$\text{где, } F_2(x) = \int_0^x \varphi_2(z) dz + C_{10}, \quad F_3(x) = \int_0^x \left(\int_0^z \varphi_3(t) dt \right) dz + C_{21}x + C_{20}.$$

После некоторых преобразовании из последней системы уравнений находим:

$$\begin{cases} f_1(-cx) = \frac{c^2}{c^2-1} [\varphi_1(x) - F_3(x)] \\ f_2(-x) = -\frac{1}{2(c-1)} \varphi_1(x) - \frac{1}{2} F_2(x) + \frac{c}{2(c-1)} F_3(x) \\ f_3(x) = \frac{1}{2(c+1)} \varphi_1(x) + \frac{1}{2} F_2(x) + \frac{c}{2(c+1)} F_3(x) \end{cases}$$

Отсюда имеем:

$$f_1(y-cx) = \frac{c^2}{c^2-1} \left[\varphi_1\left(x - \frac{y}{c}\right) - F_3\left(x - \frac{y}{c}\right) \right],$$

$$f_2(y-x) = -\frac{1}{2(c-1)} \varphi_1(x-y) - \frac{1}{2} F_2(x-y) + \frac{c}{2(c-1)} F_3(x-y),$$

$$f_3(y+x) = \frac{1}{2(c+1)} \varphi_1(x+y) + \frac{1}{2} F_2(x+y) + \frac{c}{2(c+1)} F_3(x+y).$$

Учитывая что $F_2(x) = \int_0^x \varphi_2(z)dz + C_{10}$, $F_3(x) = \int_0^x \left(\int_0^z \varphi_3(t)dt \right) dz + C_{21}x + C_{20}$ из

последних равенства получим:

$$f_1(y-cx) = \frac{c^2}{c^2-1} \varphi_1(x-\frac{y}{c}) - \frac{c^2}{c^2-1} \int_0^{x-\frac{y}{c}} \left(\int_0^z \varphi_3(t)dt \right) dz - \frac{c^2}{c^2-1} C_{21} \left(x - \frac{y}{c} \right) - \frac{c^2}{c^2-1} C_{20},$$

$$f_2(y-x) = -\frac{1}{2(c-1)} \varphi_1(x-y) - \frac{1}{2} \int_0^{x-y} \varphi_2(z)dz - \frac{1}{2} C_{10} + \frac{c}{2(c-1)} \int_0^{x-y} \left(\int_0^z \varphi_3(t)dt \right) dz +$$

$$+ \frac{c}{2(c-1)} C_{21}(x-y) + \frac{c}{2(c-1)} C_{20},$$

$$f_3(y+x) = \frac{1}{2(c+1)} \varphi_1(x+y) + \frac{1}{2} \int_0^{x+y} \varphi_2(z)dz + \frac{1}{2} C_{10} + \frac{c}{2(c+1)} \int_0^{x+y} \left(\int_0^z \varphi_3(t)dt \right) dz +$$

$$+ \frac{c}{2(c+1)} C_{21}(x+y) + \frac{c}{2(c+1)} C_{20}.$$

Подставим функции f_n , $n=1,3$ в (5) и после некоторых преобразований, находим

$$U(x,y) = \frac{c^2}{c^2-1} \varphi_1(x-\frac{y}{c}) - \frac{c^2}{c^2-1} \int_0^{x-\frac{y}{c}} \left(\int_0^z \varphi_3(t)dt \right) dz - \frac{c^2}{c^2-1} C_{21} \left(x - \frac{y}{c} \right) - \frac{c^2}{c^2-1} C_{20} -$$

$$- \frac{1}{2(c-1)} \varphi_1(x-y) - \frac{1}{2} \int_0^{x-y} \varphi_2(z)dz - \frac{1}{2} C_{10} + \frac{c}{2(c-1)} \int_0^{x-y} \left(\int_0^z \varphi_3(t)dt \right) dz + \frac{c}{2(c-1)} C_{21}(x-y) + \frac{c}{2(c-1)} C_{20} +$$

$$+ \frac{1}{2(c+1)} \varphi_1(x+y) + \frac{1}{2} \int_0^{x+y} \varphi_2(z)dz + \frac{1}{2} C_{10} + \frac{c}{2(c+1)} \int_0^{x+y} \left(\int_0^z \varphi_3(t)dt \right) dz + \frac{c}{2(c+1)} C_{21}(x+y) + \frac{c}{2(c+1)} C_{20}$$

или

$$U(x,y) = \frac{c^2}{c^2-1} \varphi_1(x-\frac{y}{c}) - \frac{1}{2(c-1)} \varphi_1(x-y) + \frac{1}{2(c+1)} \varphi_1(x+y) + \frac{1}{2} \int_{x-\frac{y}{c}}^{x+y} \varphi_2(z)dz +$$

$$+ \frac{c}{2(c-1)} \int_{x-\frac{y}{c}}^{x-y} \left(\int_0^z \varphi_3(t)dt \right) dz + \frac{c}{2(c+1)} \int_{x-\frac{y}{c}}^{x+y} \left(\int_0^z \varphi_3(t)dt \right) dz. \quad (7)$$

Непосредственной подстановкой можно проверить, что функция $U(x,y)$, определяемая формулой (7), удовлетворяет уравнению (3) и условиям (6).

Сперва покажем, что функция $U(x,y)$, определяемая формулой (7), удовлетворяет условиям (6). Из (7) сразу найдем что, при $y=0$ функция $U(x,y)$ равно на $\varphi_1(x)$:

$$U(x, 0) = \frac{c^2}{c^2 - 1} \varphi_1(x) - \frac{1}{2(c-1)} \varphi_1(x) + \frac{1}{2(c+1)} \varphi_1(x) = \left[\frac{c^2}{c^2 - 1} - \frac{1}{2(c-1)} + \frac{1}{2(c+1)} \right] \varphi_1(x) =$$

$$= \left[\frac{2c^2 - (c+1) + (c-1)}{2(c^2 - 1)} \right] \varphi_1(x) = \varphi_1(x).$$

Теперь из (7) находим $U_y(x, y)$:

$$U_y(x, y) = -\frac{c}{c^2 - 1} \varphi_1'(x - \frac{y}{c}) + \frac{1}{2(c-1)} \varphi_1'(x - y) + \frac{1}{2(c+1)} \varphi_1'(x + y) + \frac{1}{2} [\varphi_2(x + y) + \varphi_2(x - y)] +$$

$$+ \frac{c^2 + c}{2(c^2 - 1)} \left[-\int_0^{x-y} \varphi_3(t) dt + \frac{1}{c} \int_0^{x-y/c} \varphi_3(t) dt \right] + \frac{c^2 - c}{2(c^2 - 1)} \left[\int_0^{x+y} \varphi_3(t) dt + \frac{1}{c} \int_0^{x+y/c} \varphi_3(t) dt \right]. \quad (8)$$

Отсюда находим что, при $y = 0$ функция $U_y(x, y)$ равно на $\varphi_2(x)$:

$$U_y(x, 0) = \left[-\frac{c}{c^2 - 1} + \frac{1}{2(c-1)} + \frac{1}{2(c+1)} \right] \varphi_1'(x) +$$

$$+ \frac{1}{2} [\varphi_2(x) + \varphi_2(x)] + \frac{c^2 + c}{2(c^2 - 1)} \left[-\int_0^x \varphi_3(t) dt + \frac{1}{c} \int_0^x \varphi_3(t) dt \right] + \frac{c^2 - c}{2(c^2 - 1)} \left[\int_0^x \varphi_3(t) dt + \frac{1}{c} \int_0^x \varphi_3(t) dt \right] =$$

$$= \varphi_2(x) + \left\{ \frac{-c^2 - c}{2(c^2 - 1)} + \frac{c+1}{2(c^2 - 1)} + \frac{c^2 - c}{2(c^2 - 1)} + \frac{c-1}{2(c^2 - 1)} \right\} \int_0^x \varphi_3(t) dt = \varphi_2(x).$$

Из (8), дифференцируя по y находим $U_{yy}(x, y)$:

$$U_{yy}(x, y) = \frac{1}{c^2 - 1} \varphi_1''(x - \frac{y}{c}) - \frac{1}{2(c-1)} \varphi_1''(x - y) + \frac{1}{2(c+1)} \varphi_1''(x + y) +$$

$$+ \frac{1}{2} [\varphi_2'(x + y) - \varphi_2'(x - y)] + \frac{c^2 + c}{2(c^2 - 1)} \varphi_3(x - y) + \frac{c^2 - c}{2(c^2 - 1)} \varphi_3(x + y) - \frac{1}{(c^2 - 1)} \varphi_3(x - \frac{y}{c}). \quad (9)$$

Отсюда находим что, при $y = 0$ функция $U_{yy}(x, y)$ равно на $\varphi_3(x)$:

$$U_{yy}(x, 0) = \left\{ \frac{1}{c^2 - 1} - \frac{1}{2(c-1)} + \frac{1}{2(c+1)} \right\} \varphi_1''(x) + \frac{1}{2} [\varphi_2'(x) - \varphi_2'(x)] +$$

$$+ \left[\frac{c^2 + c}{2(c^2 - 1)} + \frac{c^2 - c}{2(c^2 - 1)} - \frac{1}{(c^2 - 1)} \right] \varphi_3(x) = \varphi_3(x).$$

А теперь покажем, что функция $U(x, y)$, определяемая формулой (7), удовлетворяет уравнению (3). Для этого из (7) вычислим $U_{xx}(x, y)$, $U_{xy}(x, y)$, $U_{xyy}(x, y)$, $U_{yyy}(x, y)$. Сперва учитывая (9), вычислим $U_{xyy}(x, y)$, $U_{yyy}(x, y)$:

$$\begin{aligned}
 U_{xyy}(x, y) &= \frac{1}{c^2-1} \varphi_1'''(x-\frac{y}{c}) - \frac{1}{2(c-1)} \varphi_1'''(x-y) + \frac{1}{2(c+1)} \varphi_1'''(x+y) + \\
 &+ \frac{1}{2} [\varphi_2''(x+y) - \varphi_2''(x-y)] + \frac{c^2+c}{2(c^2-1)} \varphi_3'(x-y) + \frac{c^2-c}{2(c^2-1)} \varphi_3'(x+y) - \frac{1}{(c^2-1)} \varphi_3'(x-\frac{y}{c})', \\
 U_{yyy}(x, y) &= -\frac{1}{c(c^2-1)} \varphi_1'''(x-\frac{y}{c}) + \frac{1}{2(c-1)} \varphi_1'''(x-y) + \frac{1}{2(c+1)} \varphi_1'''(x+y) + \\
 &+ \frac{1}{2} [\varphi_2''(x+y) + \varphi_2''(x-y)] - \frac{c^2+c}{2(c^2-1)} \varphi_3'(x-y) + \frac{c^2-c}{2(c^2-1)} \varphi_3'(x+y) + \frac{1}{c(c^2-1)} \varphi_3'(x-\frac{y}{c}).
 \end{aligned}$$

Теперь вычислим $U_{xxx}(x, y)$, $U_{xxy}(x, y)$:

$$\begin{aligned}
 U_x(x, y) &= \frac{c^2}{c^2-1} \varphi_1'(x-\frac{y}{c}) - \frac{1}{2(c-1)} \varphi_1'(x-y) + \frac{1}{2(c+1)} \varphi_1'(x+y) + \frac{1}{2} [\varphi_2'(x+y) - \varphi_2'(x-y)] + \\
 &+ \frac{c^2+c}{2(c^2-1)} \left[\int_0^{x-y} \varphi_3(t) dt - \int_0^{x-\frac{y}{c}} \varphi_3(t) dt \right] + \frac{c^2-c}{2(c^2-1)} \left[\int_0^{x+y} \varphi_3(t) dt - \int_0^{x-\frac{y}{c}} \varphi_3(t) dt \right]; \\
 U_{xx}(x, y) &= \frac{c^2}{c^2-1} \varphi_1''(x-\frac{y}{c}) - \frac{1}{2(c-1)} \varphi_1''(x-y) + \frac{1}{2(c+1)} \varphi_1''(x+y) + \frac{1}{2} [\varphi_2'(x+y) - \varphi_2'(x-y)] + \\
 &+ \frac{c^2+c}{2(c^2-1)} \varphi_3(x-y) + \frac{c^2-c}{2(c^2-1)} \varphi_3(x+y) - \frac{c^2}{(c^2-1)} \varphi_3(x-\frac{y}{c}); \\
 U_{xxx}(x, y) &= \frac{c^2}{c^2-1} \varphi_1'''(x-\frac{y}{c}) - \frac{1}{2(c-1)} \varphi_1'''(x-y) + \frac{1}{2(c+1)} \varphi_1'''(x+y) + \frac{1}{2} [\varphi_2''(x+y) - \varphi_2''(x-y)] + \\
 &+ \frac{c^2+c}{2(c^2-1)} \varphi_3'(x-y) + \frac{c^2-c}{2(c^2-1)} \varphi_3'(x+y) - \frac{c^2}{(c^2-1)} \varphi_3'(x-\frac{y}{c}); \\
 U_{xxy}(x, y) &= -\frac{c}{c^2-1} \varphi_1'''(x-\frac{y}{c}) + \frac{1}{2(c-1)} \varphi_1'''(x-y) + \frac{1}{2(c+1)} \varphi_1'''(x+y) + \frac{1}{2} [\varphi_2''(x+y) + \varphi_2''(x-y)] + \\
 &- \frac{c^2+c}{2(c^2-1)} \varphi_3'(x-y) + \frac{c^2-c}{2(c^2-1)} \varphi_3'(x+y) + \frac{c}{(c^2-1)} \varphi_3'(x-\frac{y}{c}).
 \end{aligned}$$

А теперь найденную выражению $U_{xxx}(x, y)$, $U_{xxy}(x, y)$, $U_{xyy}(x, y)$, $U_{yyy}(x, y)$ поставим в уравнению (3) и находим что

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + c \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} - c \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0.$$

Кроме того, нетрудно доказать, что если заданные функции $\varphi_n(x) \in C^3(0, l)$, $n = \overline{1, 3}$ то $U(x, y) \in C^3(R^2)$.

Докажем, что это решение меняется непрерывно при непрерывном изменении начальных условий.

Каков бы не был промежуток времени $[0, y_0]$ и какова бы ни была степень точности ε , найдется такое $\delta(\varepsilon, y_0)$, что всякие два решение уравнения (3) $U_1(x, y)$ и $U_2(x, y)$ в течение промежутка времени $[0, y_0]$ будет различаться меньше чем на ε : $|U_1(x, y) - U_2(x, y)| < \varepsilon$ ($0 \leq y \leq y_0$), если только начальные значения

$$U_1(x, y)_{y=0} = \varphi_1(x), \quad \frac{\partial^{n-1} U_1(x, y)}{\partial y^{n-1}}_{y=0} = \varphi_n(x), n = \overline{2, 3},$$

и

$$U_2(x, y)_{y=0} = \bar{\varphi}_1(x), \quad \frac{\partial^{n-1} U_2(x, y)}{\partial y^{n-1}}_{y=0} = \bar{\varphi}_n(x), n = \overline{2, 3},$$

отличаются друг от друга меньше чем на $\delta(\varepsilon, y_0)$:

$$|\varphi_n(x) - \bar{\varphi}_n(x)| < \delta, n = \overline{1, 3}.$$

Докажем это утверждение. Функции $U_1(x, y)$ и $U_2(x, y)$ связаны со своими начальными значениями формулой (7), так что

$$\begin{aligned} |U_1(x, y) - U_2(x, y)| &< \left| \frac{c^2}{c^2 - 1} \right| \left| \varphi_1(x - \frac{y}{c}) - \bar{\varphi}_1(x - \frac{y}{c}) \right| + \left| \frac{1}{2(c-1)} \right| \left| \varphi_1(x - y) - \bar{\varphi}_1(x - y) \right| + \\ &+ \left| \frac{1}{2(c+1)} \right| \left| \varphi_1(x + y) - \bar{\varphi}_1(x + y) \right| + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} |\varphi_2(z) - \bar{\varphi}_2(z)| dz + \\ &+ \left| \frac{c}{2(c-1)} \right| \int_{x-\frac{y}{c}}^{x-y} \left(\int_0^z |\varphi_3(t) - \bar{\varphi}_3(t)| dt \right) dz + \left| \frac{c}{2(c+1)} \right| \int_{x-\frac{y}{c}}^{x+y} \left(\int_0^z |\varphi_3(t) - \bar{\varphi}_3(t)| dt \right) dz. \end{aligned}$$

Если учесть что $|\varphi_n(x) - \bar{\varphi}_n(x)| < \delta, n = \overline{1, 3}$, из последнего получаем

$$\begin{aligned} |U_1(x, y) - U_2(x, y)| &< \left| \frac{c^2}{c^2 - 1} \right| \delta + \left| \frac{1}{2(c-1)} \right| \delta + \left| \frac{1}{2(c+1)} \right| \delta + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} \delta dz + \\ &+ \left| \frac{c}{2(c-1)} \right| \int_{x-\frac{y}{c}}^{x-y} \left(\int_0^z \delta dt \right) dz + \left| \frac{c}{2(c+1)} \right| \int_{x-\frac{y}{c}}^{x+y} \left(\int_0^z \delta dt \right) dz < \\ &< \frac{c}{(c-1)} \delta + \delta y_0 + \frac{\delta}{2} y_0^2 = \left[\frac{c}{(c-1)} + y_0 + \frac{y_0^2}{2} \right] \delta = \left[\frac{2c + 2(c-1)y_0 + (c-1)y_0^2}{2(c-1)} \right] \delta. \end{aligned}$$

Если положить $\delta = \frac{2(c-1)}{2c + 2(c-1)y_0 + (c-1)y_0^2} \varepsilon$, то доказывает что

$$|U_1(x, y) - U_2(x, y)| < \varepsilon \quad (0 \leq y \leq y_0).$$

Таким образом, доказано что задача Коши для уравнение (3) поставлено корректно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Джураев Т.Д., Попелек Я. О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка// Дифференциальные уравнения. 1991. Т.27. № 10. С. 1734.
2. Уринов А., Абдукодиров А. О канонические виды дифференциальных уравнений с частными производными пятого порядка с некротными характеристиками// Бюллетен Институт Математики. 2023. Т.6. №2. С. 156-176.
3. Абдукодиров А., Вохобжонова О. О задаче Коши для одного дифференциального уравнения с частными производными пятого порядка с некротными действительными характеристиками//So'ngi ilmiy tadqiqotlar nazariyasi respublika ilmiy-uslubiy jurnali. 2024. Т.7.№5.
4. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. -Москва.: Наука, 1968.-432 с.